ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ένας τοπ. χώρος (E,τ) και παίρνουμε ένα $x \in E$.
Έστω $\mathcal{N}_x$ κατευθυνόμενο $\forall V \in \mathcal{N}_x$ επιλέγουμε ένα ... $x_V \in V$
Έτσι, κατασκευάσαμε ένα δίκτυο του V.
Θ.ν.δ.ο. συγκλίνει το x_V στο x. Θεωρούμε $V_0 \in \mathcal{N}_x$, $\forall V \in \mathcal{N}_x$ με $V \geq V_0$ έχουμε ότι $V \subseteq V_0$. Άρα $x_V \in V \subseteq V_0$. Έτσι, $\forall V_0 \in \mathcal{N}_x$ $\exists$ ένα στοιχείο του $\mathcal{N}_x$, το ίδιο το V_0, ε.ω. να ισχύει $V \geq V_0$, $V \subseteq V_0$.
Άρα, $x_V \to x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ας είναι (E,τ) ένας τ.χ. $S \subseteq E$ και $y \in E$. Τότε $y \in \bar{S} \iff \exists$ δίκτυο $(x_a)_{a \in A} \in S$, τ.ώ. $x_a \to y$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω $y \in \bar{S}$ και $V \in \mathcal{N}_y$. Τότε $S \cap V \neq \emptyset$ $\forall V \in \mathcal{N}_y$ επιλέγω $x_V \in S \cap V$. Τότε το $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_y}$ είναι δίκτυο $\in S$ και μάλιστα $x_V \to y$.
$(\Leftarrow)$ 1ος τρόπος (βιβλίο)
2ος τρόπος Αρκεί ν.δ.ο. $\left.\begin{matrix}\forall u \in \tau \\ y \in u\end{matrix}\right\}$ $u \cap S \neq \emptyset$ (*)

Εάν $y \in S$, τότε είναι και στην $\bar{S}$, τελείωσα

Εάν $y \notin S$, αρκεί ν.δ.ο. (*)

U ανοιχτό, αφού $\in \mathcal{T}$ και $y \in U \Rightarrow$ (ορισμός ... και αφού

$x_\alpha \to y \Rightarrow \exists\, \alpha \in \Lambda$ για $x_\alpha \in U$ (από ορισμό δικτύου), και $\in S$ άρα

$x_\alpha \in U \cap S \neq \emptyset$

Πρόταση

Ας είναι $(E_1, \mathcal{T}_1)$ $(E_2, \mathcal{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής στο σημείο $y \in E_1$ αν $\forall$ δίκτυο $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq E_1$, με $x_\alpha \to y$, το αντίστοιχο δίκτυο $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda} \subseteq E_2$ συγκλίνει στο σημείο $f(y)$

Απόδειξη

(Στο βιβλίο, σελ. 267)

Έστω $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ οικογένεια τοπ. χώρων.

$f_i : E \to (E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$

$\exists$ κάποια τοπολογία πάνω στον E, η οποία να κάνει αυτές τις συναρτήσεις συνεχείς; Ναι.

Θεώρημα 12.2.1.

$C_i = \{ f_i^{-1}(x) : x \in \mathcal{T}_i \}_{i \in I}$, $C = \bigcup_{i \in I} C_i$, τότε $\mathcal{T} = \mathcal{T}(C) = \mathcal{T}_C$, είναι η ελάχιστη τοπολογία, όπου f_i συνεχείς συναρτήσεις

Απόδειξη

$f_i : (E, \mathcal{T}) \to (E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$. Έστω $x \in \mathcal{T}_i \Rightarrow f_i^{-1}(x) \in C_i \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i = C$

Άρα, $f_i^{-1}(x) \in C \subseteq \mathcal{T}(C) = \mathcal{T}$

$f_i^{-1} \in \mathcal{T}$

Πήρα ένα τυχαίο $x \in \mathcal{T}_i$ και έδειξα ότι $f_i^{-1}(x) \in \mathcal{T} \Rightarrow$
f_i συνεχείς συναρτήσεις $\forall i \in I$.

Θ.δ.ο. $\mathcal{T}$ ελάχιστη τοπολογία
Έστω $\mathcal{T}^*$ ελάχιστη τοπολογία, στην οποία f_i συνεχείς συναρτήσεις.
Άρα $\mathcal{T}^*$ ελάχιστη $\Rightarrow \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ (1)
Αρκεί ν.δ.ο. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$

$f_i (E, \mathcal{T}^*) \to (E_i, \mathcal{T}_i)$. Έστω $A \in \mathcal{T}_i \xrightarrow{f_i \text{ συνεχείς}} f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}^*$

$f_i^{-1}(A) \in C_i$ (από υπόθεση).

Επομένως $f_i^{-1}(A) \in C_i \Rightarrow f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}^*$
Άρα $C_i \subseteq \mathcal{T}^*$ $\forall i \in I$.

$$\left.\begin{array}{l} \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq \mathcal{T}^* \\ \bigcup_{i \in I} C_i = C \end{array}\right\} \Rightarrow C \subseteq \mathcal{T}^*$$

$$\mathcal{T}(C) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{T}^*) \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^* \text{ (2)}$$

Άρα από (1), (2) $\Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}^*$

$(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια τοπ. χώρων.

$$E = \bigtimes_{i \in I} E_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} E_i, \ f(i) \in E_i\}.$$

Έστω $a \in E$, $j \in I \Rightarrow a_j = a(j) \in E$ $(a_i)_{i \in I}$

$p_j : E \to E_i$, $p_j((a_i)_{i \in I}) = a_j = a(j)$

$C_i = \{p_i^{-1}(x) : x \in \mathcal{T}_i\}$, $C = \bigcup_{i \in I} C_i$

Ελάχιστη τοπολογία της C_i θα είναι $\tau(C)=\tau$, του $E=\underset{i\in I}{X} E_i$ στην οποία οι προβολές p_i, $i\in I$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

$E \xrightarrow{p_i} (E_i, \tau_i)$ Μπορώ να βάλω μια τοπ. ε.ω. p_i να είναι συνεχείς.

$\bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(U_i),\ U_i\in\tau_i\}\subseteq\tau_E$ $(*)$

Με αυτόν τον τρόπο φτιάχνω την ελάχιστη τοπολ., όπου είναι και η ελάχιστη για τις p_i για να είναι συνεχείς.

$X E_i \xrightarrow{p_i} p_i(\bar{x})\in E_i$

Ποια είναι η τοπολογία η οποία μας βγάζει όλες τις παραπάνω συναρτήσεις συνεχείς;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Η τοπολογία γινόμενο, όπου επειδή έχει την ιδιότητα $(*)$ είναι η ελαχιστική τοπολογία.

Μια πιο μεγάλη είναι η box topology.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.2.2

(E,τ) τοπ. χώρος γινόμενο των (E_i,τ_i) τ.χ.

$f: Y\to E$, όπου Y τυχαίος τ.χ. f συνεχής αν-ν $f_i = p_i \circ f$ συνεχείς συναρτήσεις, $i\in I$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Στο βιβλίο)

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

$(Y,\tau) \xrightarrow{f} (\underset{i\in I}{X^n} E_i, \tau_B) \xrightarrow{p_i} (E_i, \tau_i)_{i\in I}$

f συνεχής αν-ν $f_i = p_i \circ f$

Μπορώ δηλαδή να ελέγξω την συνέχεια των προβολών, για

μπορεί να είναι πιο εύκολο.
Για το αντίστροφο μπορώ να πάρω ανοιχτό A του $(X\mathcal{E}_i, \mathcal{T}_0)$ στο $(\mathcal{E}_i, \mathcal{T}_i)$. Αρκεί ν.δ.ο. $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$

13ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τοπ. χώρος λέγεται 1ης αριθμησιμότητας αν $\forall$ σημείο του p $\exists$ μια το πολύ αριθμήσιμη βάση του $\mathcal{N}_p$.

Αν p είναι ένα σημείο και $\mathcal{B}_p = \{V_1, V_2, \dots\}$ μια το πολύ αριθμήσιμη βάση του $\mathcal{N}_p$, η συλλογή $\mathcal{B}_p' = \{W_1, W_2, \dots\}$ με $W_1 = V_1, \dots, W_{k+1} = W_k \cap V_{k+1}, \dots$ $k \in \mathbb{N}$ είναι μια φθίνουσα και το πολύ αριθμήσιμη βάση του $\mathcal{N}_p$.
Άρα σε έναν τοπ. χώρο 1ης αριθμ. μπορούμε πάντοτε να θεωρήσουμε μια φθίνουσα και το πολύ αριθμήσιμη βάση του $\mathcal{N}_p$, ενός σημείου p.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τ.χ. $(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ λέγεται 2ης αριθμησιμότητας (second countable) αν $\exists$ μια το πολύ αριθμήσιμη βάση της $\mathcal{T}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\mathcal{B}_1 = \{[a, b] \,/\, a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι βάση της $\mathcal{E}$. Αλλά αφού $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ αριθμ., $\mathcal{B}_1$ αριθμ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι 2ης αριθμ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια κλάση $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, είναι βάση του διακριτού τ.χ. $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ αν-ν $\{\{x\} / x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{B}$ (1)
Επειδή $\{\{x\} / x \in \mathbb{R}\}$ όχι αριθμ. από (1), η $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}$ δεν είναι αριθμήσιμη, άρα $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ δεν είναι 2ης αριθμ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν ένας τ.χ. $(E,\mathcal{T})$ είναι $2^{ης}$ αριθμ. τότε είναι και $1^{ης}$ αριθμ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Στο βιβλίο).

Το αντίστροφο δεν ισχύει

Παράδειγμα έστω ο τ.χ. $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$. $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, η συλλογή $\{\{\varphi\}\}$ είναι βάση του φ και μάλιστα το πολύ αριθμήσιμη. Άρα ο $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ είναι $1^{ης}$ αριθμήσιμ. Όμως, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, ο $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ δεν είναι $2^{ης}$ αριθμησιμότητας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν ένας τ.χ. $(E,\mathcal{T})$ δεν είναι $1^{ης}$ αριθμ., δεν είναι ούτε δεύτερης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $\mathcal{T}$ είναι η τοπολ. των πεπερασμένων συμπληρωμάτων στο $\mathbb{R}$. Τότε ο $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ δεν είναι $1^{ης}$ αριθμ., άρα δεν είναι ούτε $2^{ης}$. $\mathcal{T} = \{B \mid B \subseteq X$ και B^c πεπ.$\} \cup \{\emptyset\}$

Έστω ότι είναι $1^{ης}$. Οπότε αν $x \in \mathbb{R}$, $\exists$ μια αριθμ. βάση περιοχών του x η $\mathcal{B}_x = \{B_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Εφόσον, $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_n \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ $\cup B_n^c$ αριθμήσιμο

Αλλά, $\cap B_n = \{x\}$, επομένως, $\cup B_n^c = (\cap B_n)^c = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, άρα $\cup B_n^c$ είναι άπειρο και μη αριθμήσιμο ΑΤΟΠΟ.

Άρα $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ δεν είναι $1^{ης}$ αριθμησιμότητας

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $1^{η}$ κ' η $2^{η}$ αριθμ. είναι κληρονομικές ιδιότητες δηλ. αν $(E,\mathcal{T})$ είναι ένας τ.χ. και $(S,\mathcal{T}_S)$ τ.χ. του E τότε:

α) Αν ο $(E,\mathcal{T})$ είναι $1^{ης}$ αριθμ., το ίδιο ισχύει για τον $(S,\mathcal{T}_S)$

β) Αν ο $(E,\mathcal{T})$ είναι $2^{ης}$ αριθμ., το ίδιο ισχύει για τον $(S,\mathcal{T}_S)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Στο βιβλίο)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τ.χ. (E, τ) λέγεται διαχωρίσιμος (separate) αν έχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο τ.χ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Γνωρίζουμε ότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\mathbb{Q}$ αριθμ. Επομένως, ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι διαχωρίσιμος.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν ένας τοπ. χώρος (E, τ) είναι 2ης αριθμ., τότε είναι και διαχωρίσιμος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Στο βιβλίο).

Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Πράγματι, αν τ είναι η τοπ. των πεπ. συμπληρωμάτων στο $\mathbb{R}$ και A είναι απειραρ. υποσ. του $\mathbb{R}$, τότε $\overline{A} = \mathbb{R}$. Επομένως, ο τ.χ. $(\mathbb{R}, \tau)$ είναι διαχωρίσιμος, αλλά όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα δεν είναι 2ης αριθμ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν ο (E, τ) δεν είναι διαχωρίσιμος, τότε δεν είναι 2ης αριθμ.